Przykład 1

$$\lim_{x\to 3}(2x^2+5) = \lim_{x\to 3} 2x^2 + \lim_{x\to 3} 5 = 2\cdot\lim_{x\to 3} x^2 + 5 = 2\cdot\lim_{x\to 3} x\cdot\lim_{x\to 3} x + 5 =$$
$$= 2\cdot 3\cdot 3 + 5 = 23$$

Zauważ, że dla funkcji $f(x) = 2x^2 + 5$ mamy $f(3) = 2\cdot 3^2 + 5 = 23$, czyli $\lim_{x\to 3}(2x^2+5) = f(3)$.

Jeżeli funkcja f jest wielomianem, to:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ćwiczenie 1

Oblicz granicę.

a) $\lim_{x\to -2}(3x^2 - x + 2)$ b) $\lim_{x\to 3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$ c) $\lim_{x\to 1}(x^2+1)^{10}$

Przykład 2

Oblicz $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x+1}{x^2+2}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x+1}{x^2+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(5x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)} = \frac{6}{3} = 2$$

Zauważ, że dla funkcji $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+2}$ mamy $f(1) = 2$, czyli $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Podobna własność zachodzi dla dowolnej funkcji wymiernej.

TWIERDZENIE

Jeżeli $f(x) = \dfrac{w(x)}{v(x)}$ jest funkcją wymierną, gdzie w, v są wielomianami, oraz $v(x_0) \neq 0$, to:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{w(x)}{v(x)} = \frac{w(x_0)}{v(x_0)}$$

Twierdzenie to jest wnioskiem z analogicznego twierdzenia dla granic ciągów (s. 241).

Ćwiczenie 2

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3-x}{2x^2-10}$ c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4x^4-4x^2+1}{2x^2-1}$

Przykład 3

Oblicz $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x}$.

Dla $x = 3$ licznik i mianownik przyjmują wartość 0 – mamy tu do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\left[\frac{0}{0}\right]$, nie możemy więc skorzystać z powyższego twierdzenia. Licznik i mianownik rozkładamy na czynniki i skracamy:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}} = \lim_{x\to 3} \frac{x-1}{x} = \frac{2}{3}$$

Przykład 4

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$$

Ćwiczenie 3

Oblicz granicę.

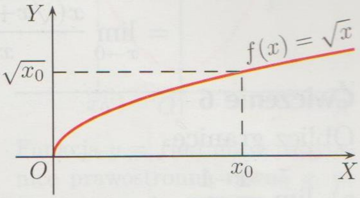
a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4x-x^3}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-x-12}{x^2-16}$

Kolejne twierdzenie dotyczy granicy funkcji, w której wzorze występuje pierwiastek.

Jeśli $x_0 > 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Ogólnie: $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$

- dla $x_0 > 0$, jeżeli n jest liczbą parzystą;
- dla $x_0 \in \mathbf{R}$, jeżeli n jest liczbą nieparzystą.



Ćwiczenie 4

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x \to 64} (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$ b) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ c) $\lim\limits_{x \to 0{,}001} (\sqrt[3]{x} + 100x)$

Jeśli funkcja f przyjmuje wartości nieujemne i istnieje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, to:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f(x)}$$

Przykład 5

Oblicz $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x^2 + 5}$.

$\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$, zatem $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{9} = 3$

Ćwiczenie 5

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x \to -6} \frac{\sqrt{1 + 2x^2}}{\sqrt{|x| + 3}}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x - 4}$ c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^4 + 9}}{\sqrt{3x - 2}}$

Przykład 6

Oblicz $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$.

Zwróć uwagę na to, że $\lim\limits_{x \to 2} (\sqrt{2x} - 2) = 0$ oraz $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0$. Aby obliczyć tę granicę, postępujemy następująco:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \to 2} \left(\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x}+2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x}+2} = \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}$$

Przykład 7

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)=2$$

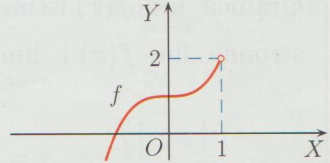
Ćwiczenie 6

Oblicz granicę.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$

Ćwiczenie 1

Sformułuj definicję **granicy lewostronnej** funkcji f w punkcie x_0: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.



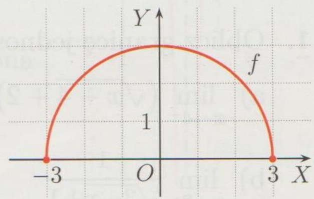
Funkcja $y = f(x)$ ma w $x_0 = 1$ granicę lewostronną równą 2, co zapisujemy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

Granica prawostronna funkcji oraz granica lewostronna funkcji nazywane są **granicami jednostronnymi** funkcji f w punkcie x_0.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji danej wzorem $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, gdzie $x \in \langle -3; 3 \rangle$.
Granice funkcji na krańcach dziedziny:

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 0$$

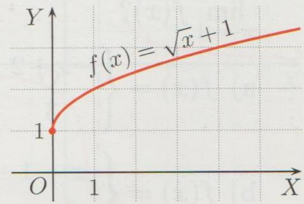


Przy obliczaniu granic jednostronnych stosuje się analogiczne metody i twierdzenia, jak w wypadku obliczania granic.

Przykład 2

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x} + 1) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} + \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 0 + 1 = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{6}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}} = \dfrac{6}{2} = 3$



Ćwiczenie 2

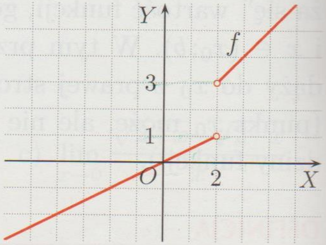
Oblicz granicę jednostronną.

a) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-16}+2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}$

Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ x+1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$



W punkcie $x_0 = 2$ można obliczyć obie granice jednostronne funkcji f:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\tfrac{1}{2}x\right) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x+1) = 3$$

Zauważ jednak, że $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$. Funkcja f ma obie granice jednostronne, ale nie ma granicy w punkcie $x_0 = 2$.

TWIERDZENIE

Granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ oraz zachodzi równość:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Zatem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.